

IL SUDOKU TRA TEORIA DEI MODELLI MENTALI
E COGNIZIONE DISTRIBUITA

1. IL SUDOKU COME STRUMENTO PER INDAGARE IL RAGIONAMENTO DEDUTTIVO

Il sudoku, oltre ad essere un passatempo praticato quotidianamente da milioni di persone può funzionare da strumento per indagare il ragionamento deduttivo. Questo rompicapo, al pari di compiti tradizionalmente utilizzati nei test di laboratorio, quali i sillogismi (Johnson-Laird e Bara 1984) o il compito di selezione di Wason (Wason 1966) può essere risolto attraverso processi di pura deduzione. Il sudoku ha però il vantaggio di essere scelto liberamente da giocatori di tutto il mondo che si divertono nel compiere deduzioni su deduzioni pur di completare uno schema, cosa mai successa per nessun compito proposto dagli psicologi del ragionamento. Tre osservazioni facilmente esperibili da chiunque abbia mai risolto un sudoku ci hanno indicato la direzione in cui volgere lo sguardo per comprenderne le dimensioni ecologiche: *a)* le premesse per un'inferenza non sono fornite dagli sperimentatori ma ricavate direttamente dagli utenti; *b)* il Sudoku non è un *task* di ragionamento che si esaurisce con un'inferenza, ma richiede che le conclusioni inferite facciano da premessa per le inferenze successive; *c)* i soggetti apprendono da soli le strategie più semplici e sono in grado di manipolarle per comprendere quelle più complesse.

Tali condizioni ecologiche rendono questo rompicapo un banco di prova privilegiato per saggiare le principali teorie di ragionamento. In quest'ottica è sorprendente notare che tra le più accreditate, né la Teoria dei Modelli Mentali (TMM), (Johnson-Laird e Byrne 1991) né la Teoria della Logica Mentale (TLM), (Rips 1994; Braine e O'Brien 1998) contribuiscono a definire la metrica di difficoltà di un sudoku, parametro a tutt'oggi stabilito in modo non standardizzato ed autonomo (Fasce 2005; Gould 2005) e che si affida ad una forte componente empirica sia statistica che fenomenologica per la sua definizione.

Di recente, alcuni sostenitori della TMM (Lee, Goodwin e Johnson-Laird 2008) hanno affermato che esiste una correlazione positiva tra l'indice di *Relational Complexity* (RC) (Halford, Wilson e Phillips 1998) e la difficoltà cognitiva esperita dalle persone nello svolgimento di un

sudoku. Nel presente articolo, dopo aver introdotto brevemente il gioco e le tattiche più diffuse per risolvere uno schema proporrò una tesi alternativa a quella di Lee *et al.* (2008), corroborando tale posizione con un'evidenza empirica prodotta utilizzando parte dello stesso materiale sperimentale proposto da questi autori.

2. CHE COS'È IL SUDOKU?

Un sudoku consiste in una griglia di 81 caselle suddivisa in tre componenti o set di pari numerosità: 9 righe orizzontali, 9 colonne e 9 settori. Alcune caselle sono riempite in partenza, con numeri da 1 a 9 e altre sono vuote. Il compito del giocatore consiste nell'inserire un numero in ciascuna delle caselle vuote in modo che ogni occorrenza dei numeri da 1 a 9 sia presente una sola volta in ciascun set. La forma di sudoku che prendiamo in esame in quest'articolo, prevede che lo schema abbia una sola soluzione corretta e possa essere risolto senza ricorrere a tattiche di prova ed errore bensì utilizzando, per ogni singolo inserimento, il solo ragionamento deduttivo. Gli autori che si sono occupati di metodi di soluzione (Aaronson 2006; Munari 2008) convengono su una distinzione fra tattiche di base e tattiche avanzate, in funzione del tipo di evidenza utilizzata come punto di partenza del ragionamento. Se per inserire una cifra è sufficiente ragionare su cifre presenti nello schema parliamo di tattiche di base; se invece occorre ragionare su cifre possibili allora parliamo di tattiche avanzate.

La storia del sudoku, sin dalla sua diffusione in Giappone a partire dal 1984, mostra che i giocatori scoprono ed utilizzano prevalentemente due tattiche di base: Hidden Single (HS), o *inclusion*, e Naked Single (NS), o *exclusion* illustrate in figura 1 a e b.

HS è espressione del principio «Se una cella è la sola in una data riga, colonna, o settore che possa avere uno specifico valore, allora avrà quel determinato valore». La distribuzione dei 7 in figura 1a, e la presenza dell'1 e del 4 nella prima colonna, fa del 7 l'unico candidato per la cella dove è stato collocato il 7 col cerchietto. Il 7 è uno dei possibili candidati per la cella, ma la cella indicata è per il 7 l'unica possibile all'interno della colonna quindi deve necessariamente contenerlo.

NS è invece espressione del principio «Se una cella può avere un solo valore, considerando i valori della colonna, della riga e del settore a cui appartiene, allora avrà quel valore». In figura 1b l'8 è l'unico candidato possibile per la cella in alto a destra. Questa cella può avere solo questo valore.

Applicare HS significa ragionare partendo dalla distribuzione di varie occorrenze della stessa cifra, mentre per NS ci si basa sulle celle vuote per escludere i candidati possibili in base alla distribuzione di valori nei tre rispettivi set. In un caso, HS, si sceglie una cifra e si «vede» in quale

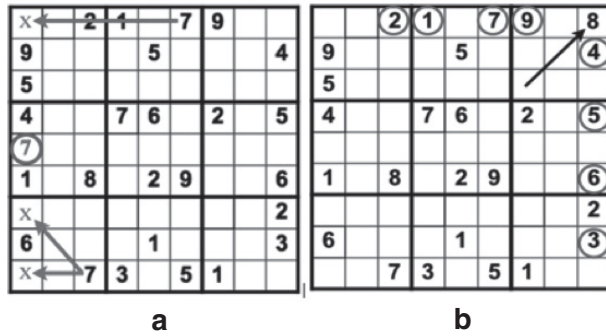


FIG. 1. Un tipico schema di sudoku. In figura 1a è illustrata la tattica dell'Hidden Single. In figura 1b è illustrata la tattica del Naked Single.

cella tale cifra potrebbe essere il solo candidato necessario. Nell'altro, NS, si sceglie una cella e si cerca quale possa essere il solo candidato possibile.

HS e NS costituiscono l'intero pool delle tattiche di base e permettono la soluzione di un gran numero di sudoku di differenti livelli di difficoltà. Su di esse si sono soffermati Lee *et al.* (2008) per tentare di studiare il sudoku nell'ottica della teoria dei modelli mentali.

3. COGNIZIONE DISTRIBUITA VS. RELATIONAL COMPLEXITY

Lee *et al.* (2008) sostengono che la *Relational Complexity* (Halford *et al.* 1998) associata ad ogni specifica deduzione nello svolgimento di uno schema sia un potenziale candidato per spiegare la diverse difficoltà di un processo deduttivo. In particolare sostengono che all'aumentare di RC cresca anche la difficoltà di inserimento di un valore corretto nello schema, e che a parità di RC, la tecnica NS sia preferita dai soggetti a quella dell'HS.

La *Relational Complexity* corrisponde, per la tattica NS, al numero di set in cui rintracciare le cifre da escludere. Per la tattica HS, invece, la RC corrisponde al numero di occorrenze della cifra *target* nei set da considerare per l'inserimento. Nello schema in figura 2a, ad esempio l'inserimento del 5 nella cella indicata dalla N è un'applicazione della strategia NS. Ragionando sulla cella N notiamo come tutti i candidati escluso il 5 e il 3 siano presenti all'interno della colonna che contiene N. Il 3 è presente nella riga orizzontale che contiene N, quindi dato che per concludere che N deve contenere un 5 occorre considerare due set, una riga e una colonna, $RC=2$.

Nella figura 2b l'inserimento di un 2 nella cella indicata dalla lettera N ha $RC=2$ perché in questo caso RC equivale alla somma delle

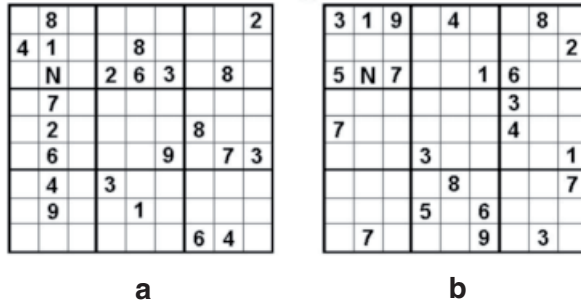


FIG. 2. Gli schemi utilizzati da Lee *et al.* (2008) con indicazione attraverso la lettera N dell'inserimento da effettuare.

occorrenze della cifra da considerare – una sola in questo caso – più il set all'interno del quale la cella N è l'unica collocazione possibile per il 2.

Lee *et al.* (2008) hanno mostrato che a parità di RC (RC=2) le persone hanno trovato la soluzione corretta ed in minor tempo nel caso della figura 2a (usando la tattica NS, 83% risposte corrette, 47 sec. impiegati) rispetto alla figura 2b (usando HS, 67% risposte corrette, 122 sec. impiegati). Al crescere di RC le prestazioni dei soggetti nell'applicare HS peggioravano ulteriormente (con RC=4; 50% risposte corrette, 170 secondi impiegati).

Questi risultati sono frutto di un'indagine sperimentale in cui era chiesto ai partecipanti di inserire un numero in una cella *target* N indicata dallo sperimentatore. A nostro avviso ciò altera il normale processo di soluzione del sudoku poiché la scelta della casella è parte integrante delle due tattiche di ragionamento, e non vi è ragione alcuna per ipotizzare che tale scelta sia indipendente dal resto del processo inferenziale. Indicare la casella da cui partire vanifica in larga parte la validità ecologica del sudoku perché orienta all'applicazione di NS a discapito di HS. Ciò avviene perché per applicare NS la parte più complessa consiste nel localizzare la cella adatta. D'altra parte sapere su quale cella vuota occorre ragionare non è d'alcun aiuto per applicare HS. Per mostrare se una strategia prevale sull'altra occorre analizzare uno schema per intero e restituire il sudoku alle sue condizioni ecologiche. Ciò permette di riconsiderare alcuni degli assunti della TMM nell'ottica più ampia della Cognizione Distribuita e ridimensionare il ruolo di RC come elemento in grado di orientare un utente nella soluzione di un sudoku.

Entrambe le tattiche richiedono di proiettare i valori esistenti nello schema sulle celle vuote. NS richiede di prendere in considerazione esplicitamente, per escluderle, 8 premesse (ovvero tutte le cifre tranne quella da inserire). Inoltre, più le cifre sono distribuite fra diversi set,

meno sarà facile individuare la cella *target*. Mentre nel caso di HS, i valori da considerare sono al massimo 4; per di più la cifra da collocare è la stessa che avvia il processo di proiezione (ad esempio il 7 in fig. 1a). Quindi, a parte i casi in cui all'interno di una riga, colonna o settore manchino solo uno o due candidati, come nella figura 2a, HS dovrebbe essere più frequentemente applicato di NS e la RC non inciderebbe in alcun modo sul processo deduttivo. Ciò è in accordo con il principio di verità della TMM (Johnson-Laird 2001) secondo il quale un modello rappresenta esplicitamente solo ciò che una premessa rende possibile ed implicitamente ciò che essa esclude. Gli enunciati della forma $p \rightarrow q$ sono rappresentati in un solo modello esplicito in cui p e q sono veri entrambi, mentre le possibilità in cui uno o ambedue gli elementi sono falsi sono rappresentati in modelli impliciti ed accessibili con maggiore difficoltà da parte degli individui. Ciò spiega perché una conclusione le cui premesse sono rappresentate in modelli espliciti come il *modus ponens* è tratta più rapidamente ed accuratamente di una le cui premesse sono rappresentate in modelli impliciti, come il *modus tollens*. Nel sudoku, secondo noi, avviene un processo simile, ma mediato dalle rappresentazioni esterne, che sono parte integrante della costruzione dei modelli mentali ed hanno la proprietà fondamentale di favorire alcune operazioni e ostacolarne altre (Rizzo 1999; 2000; Rizzo e Palmonari 2000). Le ripetute occorrenze di una cifra permettono di costruire un modello esplicito sufficiente per applicare HS mentre l'osservare la singola cella vuota non permette la costruzione di un modello che descriva quanti candidati sono possibili per quella cella. Chi applica NS quindi incontra maggiori difficoltà perché deve compiere un'analisi simile a quella che occorre per rendere esplicite tutte le possibilità di un enunciato della forma $p \rightarrow q$. Per testare la validità di tale argomentazione abbiamo allestito due semplici indagini sperimentali.

Nella prima abbiamo utilizzato alcuni degli stessi schemi utilizzati da Lee *et al.* (2008) ma abbiamo lasciato i partecipanti liberi di condurre le deduzioni che credevano opportune. Nella seconda abbiamo utilizzato un sudoku che poteva essere completato totalmente attraverso la strategia del NS ed abbiamo chiesto a giocatori di diversi livelli di esperienza di completarlo liberamente. In entrambe le indagini sperimentali abbiamo registrato la cifra inserita, il tipo di strategia ed il tempo. Nell'esperimento 1 ci siamo limitati al primo inserimento, mentre nell'esperimento 2 abbiamo registrato l'intera sequenza.

3.1. *Esperimento 1*

Abbiamo sottoposto a 20 soggetti senza esperienza gli schemi di figura 1a e 1b in ordine randomizzato, senza indicare alcuna cella *target* e chiedendo loro di fare quanti più inserimenti possibili. Abbiamo

registrato il primo inserimento compiuto, il tipo di tattica adottata, NS o HS ed il tempo impiegato misurato in secondi.

In entrambi gli schemi sono possibili altri inserimenti, utilizzando sempre le tattiche di base, oltre a quelli suggeriti dalla N nella condizione di Lee e collaboratori illustrati in figura 2.

I risultati sono riportati in tabella 1. I dati sono stati analizzati applicando due *Contingency Table* (CT) (2 x 2): Tattica Adottata (NS, HS) vs. Sudoku (Schema a, Schema b) ($p \leq 0.05$); Tempo medio di Esecuzione della Tattica (NS, HS) vs. Sudoku (Schema a, Schema a) ($p = n.s.$) al fine di accertare eventuali differenze fra le due tattiche e da una MANOVA a due vie (Sudoku x *Relational Complexity*) per valutare se i tempi di soluzione sono differenti al variare di RC (La variabile tipo di Sudoku è stata introdotta a seguito della differenza significativa riscontrata nella seconda CT) RC, ($f = 2,18$; $p = ns$) Sudoku ($f = 12,32$; $p \leq 0,05$) Interazione ($f = 6,67$; $p = ns$).

TAB. 1. Sono riportati i tipi d'inserimento compiuti negli schemi divisi per tattiche e per *Relational Complexity*. Tempo indica i secondi necessari in media per gli inserimenti per i rispettivi schemi e rispetto alla RC (*Relational Complexity*) di ciascun inserimento

Tipo	Schema 2a		Schema 2b	
	Soggetti	Tempo	Soggetti	Tempo
NS	10	55	2	100
HS	10	37	18	61
NS o HS-RC2	16	52	9	58
NS o HS-RC3	4	23	9	66
NS o HS-RC4	0	0	2	88

I risultati delle analisi sono compatibili con l'ipotesi che la tattica HS sia globalmente preferita a NS e non è riscontrata una differenza significativa nei tempi impiegati nella condotta della due tattiche. Nessuna differenza è inoltre stata rilevata nei tempi in funzione del differente livello di RC bensì di una differenza tra i due sudoku.

3.2. Esperimento 2

Per osservare se nella pratica quotidiana una tattica fosse davvero privilegiata abbiamo sottoposto lo schema in figura 3 a quindici soggetti di esperienza diversa e chiesto loro di risolverlo tutto esplicitando il percorso che aveva condotto a ciascun inserimento con il metodo del *thinking aloud*. Lo schema nella figura 3 è stato prescelto perché presentava la possibilità di essere risolto semplicemente con l'applicazione di NS, ma era possibile ovviamente applicare anche altre tattiche. Abbiamo

4	9	1					
		5					2
2			8	6	3		
1			7			4	
6							7
	7		6				5
		2	6	4			9
3				1			
				3	7		8

FIG. 3. Lo schema utilizzato nell'esperimento 2. Questo schema è totalmente risolvibile utilizzando la tattica del *Naked Single*, ovvero ad ogni passo verso la soluzione completa dello schema è sempre possibile una deduzione basata su tale forma di ragionamento.

tracciato i tempi di inserimento di ciascuna cifra inserita e registrato i protocolli verbali.

I dati così ottenuti e riassunti in tabella 2 sono stati trattati con due strumenti statistici inferenziali, una *Contingency Table* (3 x 2; vedi fig. 4): Esperienza (campioni, media esperienza, principianti) vs. Tattica (HS, NS) ($p \leq 0.0001$); ed un ANOVA ad una via (Tempo) articolata su tre livelli (campioni, media esperienza, principianti) ($p \leq 0.0001$; $F = 35,64$). L'analisi *post-hoc*, *Tukey's Multiple Comparison Test*, ha evidenziato una differenza significativa per ogni confronto: campioni vs. media esperienza $p \leq 0.01$; campioni vs. principianti $p \leq 0.001$; media esperienza vs. principianti $p \leq 0.01$.

La differenza significativa emersa dal confronto (ANOVA) fra i diversi tempi di compilazione dei tre gruppi conferma la differente com-

TAB. 2. Tipo di inserimento (HS o NS) effettuato dei partecipanti all'esperimento 2 raggruppati in base al loro livello di competenza (Campioni, Media esperienza e Principianti). Per ognuno di loro è anche riportato il tempo totale impiegato, in minuti, per il completamento dello schema riprodotto in figura 3

S	Campioni				Media esperienza				Principianti			
	HS	NS	Al- tre	Tem- po	S	HS	NS	Tem- po	S	HS	NS	Tem- po
S1	29	26		12	S6	23	32	34	S11	0	55	77
S2	28	25	2	16	S7	21	34	28	S12	9	46	73
S3	31	24		11	S8	16	39	34	S13	11	44	70
S4	29	25	1	12	S9	24	31	39	S14	15	40	39
S5	32	23		12	S10	20	35	40	S15	14	41	60
Media	30	25		12	Media	21	34	35	Media	9,8	45,2	64

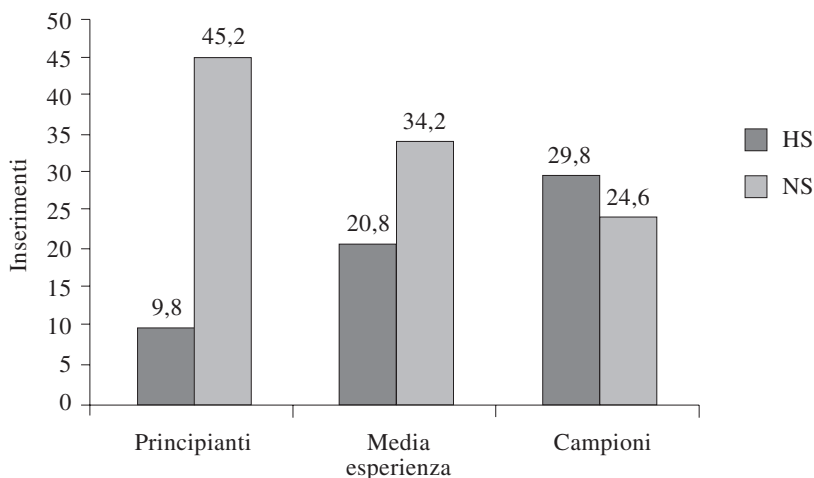


FIG. 4. Numero di inserimenti condotti ricorrendo ad una delle due tattiche (HS o NS) in relazione al livello di competenza dei partecipanti allo studio (Principianti, Media esperienza, Campioni).

petenza dei gruppi e può quindi corroborare l'interpretazione dei risultati ottenuti dalla *Contingency Table*. La differenza significativa prodotta da quest'analisi denota un uso della tattica NS privilegiato nei Principianti che non sembra confermata nei Campioni. I principianti sono in grado di interpretare la regola generale del sudoku soltanto come un invito a cercare una cella *target* all'interno della quale è possibile inserire solo un candidato, ovvero come un indizio che guida all'applicazione di NS. Con l'esperienza, a volte anche durante la soluzione del primo sudoku, alcuni soggetti comprendono che la regola può essere interpretata anche come un invito a cercare varie occorrenze della stessa cifra per escluderle non dalle singole celle, ma dai singoli set. L'analisi dei protocolli verbali ci mostra che capire questo passaggio è ciò che guida ad applicare HS. Da quest'osservazione possiamo supporre che HS sia una tattica di base, dato che le cifre da utilizzare come premesse sono definite nello schema, ma che sia di un livello più avanzato rispetto ad NS perché richiede più tempo per essere appresa. Con la pratica, dato che HS permette inferenze a partire da modelli mentali espliciti, essa è maggiormente utilizzata. Infatti gli utenti esperti utilizzano le due tattiche in combinazione l'una con l'altra con una preferenza per HS quando è possibile applicarla.

4. DISCUSSIONE

I risultati conseguiti dalle due indagini sperimentali mettono in luce la notevole differenza di evidenza empirica che può essere prodotta tentando di piegare le condizioni ecologiche alle condizioni che storicamente si sono formate in laboratorio. L'analisi condotta permette di rivedere alcune posizioni della TMM. Secondo quest'approccio un processo di ragionamento deduttivo è articolato in tre passaggi. Nel primo *step* gli sperimentatori forniscono le premesse ai soggetti ed esse vengono rappresentate in modelli, nel secondo i modelli sono combinati per formulare una o più possibili conclusioni, nel terzo, i soggetti lavorando per falsificazione scartano le alternative incompatibili con i modelli. Nella soluzione di un sudoku questo processo avviene diversamente perché le premesse non sono esplicitamente enunciate dagli sperimentatori prima di chiedere ai soggetti di compiere un'inferenza. Chi risolve deve ricavare le premesse e costruire i modelli possibili non in un processo sequenziale, ma contemporaneamente.

Raramente le teorie di ragionamento si sono occupate di problemi che richiedono deduzioni concatenate in cui una conclusione fa da premessa per le inferenze successive (Lee e Johnson-Laird 2004). Ancora più raramente (Van der Henst, Yang e Johnson-Laird 2002) è stato notato ciò che avviene nel sudoku, ovvero che i soggetti apprendono da soli strategie di ragionamento via via sempre più complesse. Inoltre, senza che nessuno abbia mai spiegato queste strategie in forma normativa, essi sono in grado non solo di riconoscere situazioni per applicarle nuovamente, ma di spiegarle verbalmente come norme ed insegnarle ad altri. Crediamo che questo processo di apprendimento sia possibile solo grazie alla particolare struttura del sudoku ed è confermato da tre fattori osservati: a) le occorrenze della stessa cifra nei set afferenti al set *target* funzionano da rappresentazioni esterne; b) le rappresentazioni esterne rendono esplicite molte possibilità coerenti con le premesse in modelli più economici; c) i soggetti sono in grado di trovare e sostenere ragionamenti complessi perché una configurazione di cifre rende i vincoli di ciascun set più facili da percepire e da manipolare.

5. CONCLUSIONI

La posizione da noi proposta non mira a confutare la Teoria dei Modelli Mentali, bensì accoglie alcuni dei suoi assunti fondamentali, quali: i) il numero di modelli mentali è correlato positivamente con la difficoltà di un compito, ii) i MM sono propensi a rappresentare ciò che è vero e non ciò che è falso, iii) i MM sono isomorfi alla realtà con cui si interagisce. Collochiamo però tali assunti nel contesto più ampio della psicologia culturale e, per i fini di questo lavoro, nella recente corren-

te della cognizione distribuita. Partendo dall'assunto che i MM siano isomorfi alla realtà noi sosteniamo che essa entri tout court nel vissuto di ogni MM non come interpretazione/traduzione della realtà esterna, a noi in ogni caso inaccessibile, bensì come costruzione attiva della nostra relazione con il mondo. Per cui la presenza di artefatti (segni, strumenti) diviene, attraverso i processi di sviluppo sociogenetico, parte integrante della realtà psicologica delle persone. In altre parole le rappresentazioni «esterne» sono contenute nei MM che noi costantemente costruiamo nell'interazione con il mondo e le operazioni che compiamo sono nella gran parte dei casi eseguite direttamente su tali rappresentazioni «esterne». Al tempo stesso il modo in cui si sviluppano le nostre abilità anche nel breve tempo di svolgimento di un compito (micro genesi) è un dato irrinunciabile per comprendere che le difficoltà di un problema anche di pura logica deduttiva non può essere affrontato sul solo piano formale, bensì richiede un'analisi del suo percorso storico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Aaronson L. (2006), *Sudoku science*, in «IEEE Spectrum» 43, 2, pp. 16-17.
- Braine M.D.S. e O'Brien D.P. (a cura di) (1998), *Mental logic*, Mahwah, N.J., Erlbaum.
- Fasce P. (2005), *A scuola di Sudoku. Storia, tecniche di soluzione, suggerimenti didattici*, Alessandria, Sonda Editore.
- Giroto V., Mazzocco A. e Tasso A. (1997), *The effect of premise order in conditional reasoning: A test of the mental model theory*, in «Cognition», 63, pp. 1-28.
- Gould W. (2005), *The times sudoku: The number-placing puzzle, books 1, 2, and 3*, London, Harper Collins.
- Halford G.S., Wilson W.H. e Phillips S. (1998), *Processing capacity defined by relational complexity: Implications for comparative, developmental, and cognitive psychology*, in «Behavioural and Brain Sciences», 21, pp. 803-831.
- Johnson-Laird P.N. (2001), *Mental models and deduction*, in «Trends in Cognitive Sciences», 5, pp. 434-442.
- Johnson-Laird P.N. e Bara B.G. (1984), *Syllogistic inference*, in «Cognition», 16, pp. 1-61.
- Johnson-Laird P.N. e Byrne R.M.J. (1991), *Deduction*, Hillsdale, N.J., Erlbaum.
- Lee N.Y.L. e Johnson-Laird P.N. (2004), *Creative strategies in problem solving*, in K. Forbus, D. Gentner e T. Regier (a cura di), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Mahwah, N.J., Erlbaum, pp. 813-818.
- Lee N.Y.L., Goodwin G.P. e Johnson-Laird P.N. (2008), *The psychological puzzle of sudoku*, in «Thinking & Reasoning», 14, 4, pp. 342-363.
- Munari D. (2008), *Novepernove. Sudoku: segreti e strategie di gioco*, Milano, Springer Verlag.

- Palmonari M. e Rizzo A. (1999), *The role of external representation in deductive reasoning*, in S. Bagnara (a cura di), *Proceedings of the European Conference of Cognitive Science ECCS'99*, Roma, IP/CNR, pp. 67-72.
- Rips L.J. (1994), *The psychology of proof*, Cambridge, MA, MIT Press.
- Rizzo A. (1999), *Il pensiero nella vita quotidiana*, in V. Girotto e P. Legrenzi (a cura di), *Psicologia del Pensiero*, Bologna, Il Mulino, pp. 203-226.
- Rizzo A. (2000), *Gli artefatti e la loro progettazione*, in «Sistemi Intelligenti», 12, 3, pp. 437-452.
- Rizzo A. e Palmonari M. (2000), *External representations and deductive reasoning*, in J. Garcia Madruga e N. Cariedo (a cura di), *Mental models in reasoning*, Madrid, UNEA Ediciones, pp. 99-118.
- Van der Henst J., Yang Y. e Johnson-Laird P.N. (2002), *Strategies in sentential reasoning*, in «Cognitive Sciences», 26, pp. 425-468.
- Wason P.C. (1966), *Reasoning*, in B.M. Foss (a cura di), *New horizons in psychology*, vol. 1., London, Penguin, pp. 135-151.

